

$$(1) \quad y' = 20e^x \sqrt[5]{y^4} \quad (\text{rovnice se separovanými proměnnými / Bernoulliho})$$

• Řešení přes separované proměnné ($f = 4e^x$, $g = 5\sqrt[5]{y^4}$)

$$(a) \quad D_f = \mathbb{R} = I_1$$

$$(b) \quad D_g = \mathbb{R}, \quad g(y) = 0 \Leftrightarrow y = 0 \rightarrow J_1 = (-\infty, 0), J_2 = (0, \infty)$$

$$(c) \quad \text{stacionární řešení } y_0 = 0 \quad (\text{na } \mathbb{R})$$

$$(d) \quad F(x) = -4e^{-x}$$

$$G(y) = \sqrt[5]{y} \quad (\text{na } J_1, J_2)$$

$$(e) \quad G^{-1}(z) = z^5 \quad G(J_1) = (-\infty, 0), \quad G(J_2) = (0, \infty)$$

$$\{x \in \mathbb{R} : F(x) + C \in G(J_1)\} = \{x \in \mathbb{R} : -4e^{-x} + C \in (-\infty, 0)\} = \begin{cases} \mathbb{R}, & C \leq 0 \\ (-\infty, -\log(\frac{C}{4})], & C > 0 \end{cases}$$

$$C > 0: -4e^{-x} + C \in (-\infty, 0) \Leftrightarrow e^{-x} \in (\frac{C}{4}, \infty) \Leftrightarrow -x \in (\log(\frac{C}{4}), \infty) \Leftrightarrow x \in (-\infty, -\log(\frac{C}{4}))$$

$$C \leq 0: -4e^{-x} + C \in (-\infty, 0) \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$$

$$\{x \in \mathbb{R} : F(x) + C \in G(J_2)\} = \{x \in \mathbb{R} : -4e^{-x} + C \in (0, \infty)\} = \begin{cases} \emptyset, & C \leq 0 \\ (-\log(\frac{C}{4}), \infty), & C > 0 \end{cases}$$

Dostáváme řešení

$$y = (C - 4e^{-x})^5 \quad \text{na } \mathbb{R} \text{ pro } C \leq 0 \quad (\text{nikdy nebude splňovat } y(\log 2) = 32)$$

$$\text{na } (-\infty, -\log(\frac{C}{4})) \text{ a } (-\log(\frac{C}{4}), \infty) \text{ pro } C > 0$$

Protože hledáme jen jediné řešení, můžeme zvolit $y = (C - 4e^{-x})^5, x \in \mathbb{R}$.

Dopočítáme C : $32 = y(\log 2) = (C - 4e^{-\log 2})^5 = (C - 2)^5 \rightarrow C = 4$

Hledané řešení je tedy $y = 1024(1 - e^{-x})^5, x \in \mathbb{R}$

Další možností by bylo řešení nalepení na stacionární řešení

$$y(x) = \begin{cases} 0, & x < 0, \\ 1024(1-e^x)^5, & x \geq 0. \end{cases}$$

Případně řešení získává dvojím lepením

$$y(x) = \begin{cases} (D-4e^x)^5, & x \in (-\infty, -\log(\frac{D}{4})) \\ 0, & x \in [-\log(\frac{D}{4}), 0] \\ 1024(1-e^x), & x > 0 \end{cases} \quad (D > 4)$$

• Řešení jako Bernoulliho rovnice

$$\alpha = \frac{4}{5} \rightarrow \text{podělíme } \frac{y^{\alpha}}{1-\alpha} = 5y^{\frac{4}{5}} \rightarrow \frac{1}{5}y'y^{-\frac{4}{5}} = 4e^x \rightarrow \text{substituce } z = y^{\frac{1}{5}}$$

$$\text{Dostaneme rovnici } z' = 4e^x \rightarrow z = -4e^{-x} + C \rightarrow y = (C - 4e^{-x})^5$$

$\uparrow$
 $y = z^5$

Dělili jsme ale nulou, takže máme opět řešení jen na intervalech jako výše.

$y=0$ je vždy řešením Bernoulliho rovnice, lepením pak získáme všechna možná řešení, jako postupem přes separování proměnné.

$$(2) \quad f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + x+2y, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & x=y=0 \end{cases}$$

Funkce $g(x,y) = x+2y$ je $C^\infty(\mathbb{R}^2)$, speciálně má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál i parciální derivace, je tam spojitá a i parciální derivace jsou tam spojité. Platí $\nabla g(0,0) = (1,2)$.

Položme $h = f - g$. Potom

$$\left| h(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - h(0,0) \right| = \left| \frac{r^3 \cos^3 \varphi (1+r \sin \varphi)}{r} \right| \leq 2r^2 \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0$$

$1 > r > 0, \varphi \in \mathbb{R}$

odtud hned můžeme vidět, že $h'(0,0)$ existuje a je nulový

Tedy h je spojitá v $(0,0)$.

$$h(x,0) = \operatorname{sgn} x \cdot x^2, \text{ tedy } \boxed{\frac{\partial h}{\partial x}(0,0) = 0} \quad (|\operatorname{sgn} x| \cdot x^2 \leq x^2)$$

$$h(0,y) = 0, \text{ tedy } \boxed{\frac{\partial h}{\partial y}(0,0) = 0}$$

Pokud má h v bodě $(0,0)$ totální diferenciál, potom $f'(0,0)(h) = \nabla f(0,0) \cdot h = 0$.

Počítejme limitu

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{h(x,y) - h(0,0) - \nabla h(0,0) \cdot (x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} = \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \underbrace{\frac{x^3(1+y)}{x^2+y^2}}_{\psi(x,y)} = 0$$

$$\text{Máme } |\psi(r \cos \varphi, r \sin \varphi)| = \left| \frac{r^3 \cos^3 \varphi (1+r \sin \varphi)}{r^2} \right| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0$$

$0 < r < 1, \varphi \in \mathbb{R}$

h (a tedy i f) má v bodě $(0,0)$ totální diferenciál.

Společně $\nabla h(x,y)$ pro $(x,y) \neq 0$, máme:

$$\begin{aligned}\frac{\partial h}{\partial x}(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{x^3(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{3x^2(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} + x^3(1+y) \cdot 2x \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot (x^2+y^2)^{-\frac{3}{2}} = \frac{3x^2(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^4(1+y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= \frac{3x^2(1+y)(x^2+y^2) - x^4(1+y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{(1+y)(2x^4+3x^2y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}\end{aligned}$$

$$\frac{\partial h}{\partial y}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{x^3(1+y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \right) = \frac{x^3}{\sqrt{x^2+y^2}} - \frac{x^3(1+y)y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3(x^2+y^2) - x^3(y+y^2)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^3(x^2-y)}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Dále $\left| \frac{\partial h}{\partial x}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - \frac{\partial h}{\partial x}(0,0) \right| = \left| \frac{r^4(1+\sin \varphi)(2\cos^4 \varphi + 3\sin^4 \varphi \cos^2 \varphi)}{r^3} \right| \leq 10r \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0$

$\uparrow$
 $0 < r < 1, \varphi \in \mathbb{R}$
 $\downarrow$

$$\left| \frac{\partial h}{\partial y}(r \cos \varphi, r \sin \varphi) - \frac{\partial h}{\partial y}(0,0) \right| = \left| \frac{r^4 \cos^3 \varphi (r \cos^3 \varphi - \sin \varphi)}{r^3} \right| \leq 2r \xrightarrow{r \rightarrow 0^+} 0$$

Tedy $\frac{\partial h}{\partial x}$ i $\frac{\partial h}{\partial y}$ jsou spojité v $(0,0)$ a tedy i $\frac{\partial f}{\partial x}$ a $\frac{\partial f}{\partial y}$ jsou spojité v $(0,0)$.

Vektor z bodu (e) má souřadnice $(\cos \frac{\pi}{6}, \sin \frac{\pi}{6}) = (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = v$

Máme $D_v f(0,0) = \nabla f(0,0) \cdot v = (1, 2) \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}) = \boxed{\frac{\sqrt{3}}{2} + 1}$